Chapitre 10
Convexité des fonctions

I. Approche graphique

1) Fonctions convexes et concaves

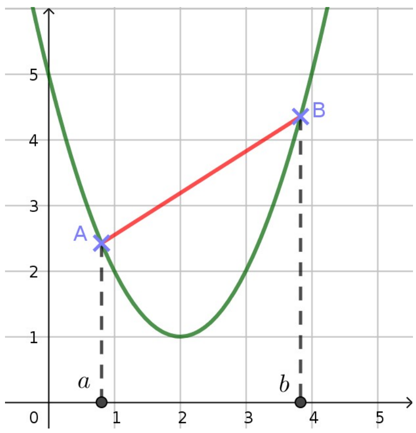
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

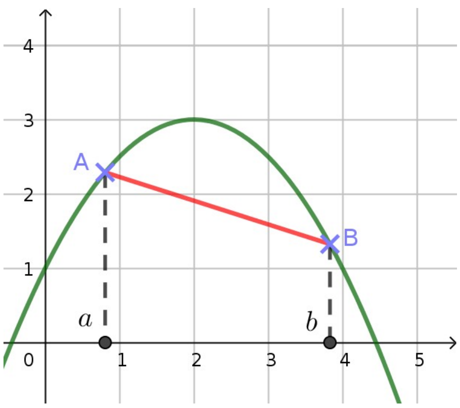
- f est **convexe** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points A(a ; $f(a)$) et B(b ; $f(b)$) est **en dessous** de la sécante (AB).
- f est **concave** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points A(a ; $f(a)$) et B(b ; $f(b)$) est **au-dessus** de la sécante (AB).

Exemples :

- La fonction représentée ci-dessous est convexe :



- La fonction représentée ci-dessous est concave :



- La fonction carrée et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est concave sur $]0 ; +\infty[$.

Remarque :

Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave.

Propriétés :

- Si f est une fonction **convexe** sur un intervalle I alors, pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0 ; 1]$:

$$f(t x + (1 - t) y) \leqslant t f(x) + (1 - t) f(y)$$

- Si f est une fonction **concave** sur un intervalle I alors, pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0 ; 1]$:

$$f(t x + (1 - t) y) \geqslant t f(x) + (1 - t) f(y)$$

Démonstration :

Soient deux réels x et y et soit t un réel de $[0 ; 1]$.

Soient $A(x ; f(x))$ et $B(y ; f(y))$.

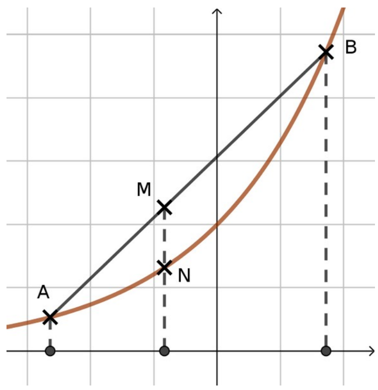
Alors le point $M(t x + (1 - t) y ; t f(x) + (1 - t) f(y))$ appartient au segment [AB], sécante de $\mathscr{C}_f$.

f étant convexe, cette sécante est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

M est donc située au-dessus du point N de coordonnées

$(t x + (1 - t) y ; f(t x + (1 - t) y))$.

D'où $f(t x + (1 - t) y) \leqslant t f(x) + (1 - t) f(y)$.



Propriété :

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

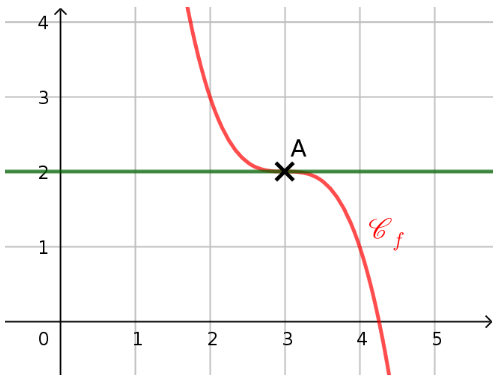
2) Point d'inflexion

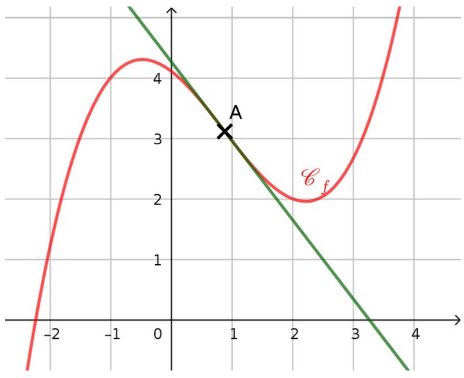
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}$.

A est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ si $\mathscr{C}$ admet une tangente en A et si $\mathscr{C}$ traverse cette tangente en A.

Exemples :





Remarque :

En l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe représentative de *f*, la fonction *f* change de convexité.

II. Convexité des fonctions dérivables

1) Caractérisation de la convexité

Propriétés :

Soit *f* une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

On note *f'* sa dérivée et *f''* sa dérivée seconde.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- *f* est convexe sur l'intervalle I.
- *f''* est positive sur l'intervalle I.
- *f'* est croissante sur I.

Exemple :

On considère la fonction polynôme *f*, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

La fonction *f* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f''(x) = 6$.

La fonction *f''* est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction *f* est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Convexité et tangente

Propriétés :

Soit *f* une fonction définie et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Soit I un intervalle sur lequel *f* est dérivable.

- Sur l'intervalle I, *f* est convexe si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
- Sur l'intervalle I, *f* est concave si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes.

<u>*Démonstration :*</u>

On suppose f convexe sur I. Soit $x_0 \in$ I.

- L'équation de la tangente T_{x_0} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est :

  $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

  Soit Φ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente.

  $\Phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0)$.

  Alors Φ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant Φ*'* sa dérivée, on obtient :

  $\Phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.

- La fonction f est convexe sur I, donc la fonction f' est croissante sur I, donc la fonction Φ' l'est aussi.

  Or $\Phi'(x_0) = 0$, donc pour tout réel x de I :

  - si $x \leqslant x_0$, alors $\Phi'(x) \leqslant 0$
  - si $x \geqslant x_0$, alors $\Phi'(x) \geqslant 0$

  Donc, la fonction Φ est décroissante sur $]-\infty\,;\,x_0] \cap$ I et croissante sur $]x_0\,;\,+\infty\,[\,\cap$ I.

x		x_0	
$\Phi'(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$\Phi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

  De plus, $\Phi(x_0) = 0$, donc 0 est le minimum de Φ sur I, donc la fonction Φ est positive sur I.

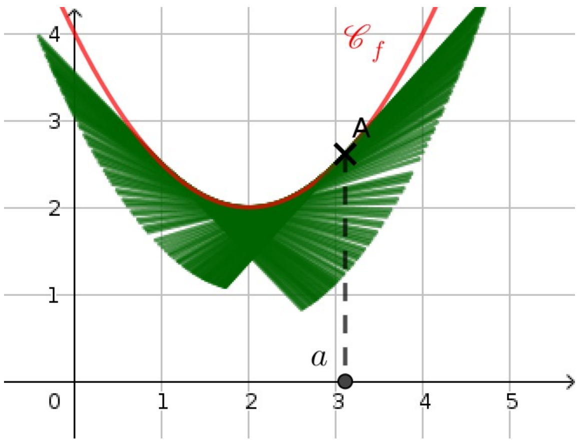
  Donc, pour tout réel x appartenant à I, $f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) \geqslant 0$.

  Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_{x_0} sur l'intervalle I.

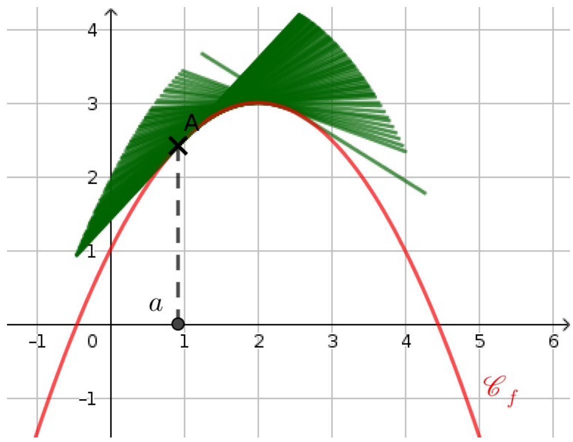
- En conclusion, sur I, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

<u>Exemple :</u>

La fonction f représentée ci-dessous est convexe.



La fonction g représentée ci-dessous est concave.



Remarque :

Une fonction croissante et convexe sur un intervalle I est une fonction qui croît « de plus en plus vite » sur I. Si elle est dérivable sur I, les pentes des tangentes à sa courbe représentative augmentent quand les abscisses augmentent.

Pour une fonction croissante et concave, c'est le contraire : elle croît « de moins en moins vite ».

3) Point d'inflexion

Propriétés :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et a un réel appartenant à I.

- Si f' change de sens de variation en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.
- Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.